数理解析研究所講究録
第 1650 巻 2009 年 59-74

Painlevé V 方程式の超幾何解と反自己双対 Yang-Mills 方程式

神戸大学大学院 理学研究科　増田 哲　(Tetsu MASUDA)

1 はじめに

反自己双対 Yang-Mills 方程式 (ASDYM 方程式) は,

$$\begin{aligned}
&\partial_z A_w - \partial_w A_z + [A_z, A_w] = 0,\\
&\partial_{\tilde{z}} A_{\tilde{w}} - \partial_{\tilde{w}} A_{\tilde{z}} + [A_{\tilde{z}}, A_{\tilde{w}}] = 0,\\
&\partial_z A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_z - \partial_w A_{\tilde{w}} + \partial_{\tilde{w}} A_w + [A_z, A_{\tilde{z}}] - [A_w, A_{\tilde{w}}] = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

で与えられる. ここで, ゲージポテンシャルの各成分 $A_* = A_*(z, w, \tilde{z}, \tilde{w})$ は, $\mathrm{tr}A_* = 0$ なる 2×2 行列, すなわち $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に値をとる函数である. 線形作用素 L_1, L_2 を

$$\begin{aligned}
L_1 &= \partial_w - \zeta\partial_{\tilde{z}} + A_w - \zeta A_{\tilde{z}},\\
L_2 &= \partial_z - \zeta\partial_{\tilde{w}} + A_z - \zeta A_{\tilde{w}},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

と定義すると, ASDYM 方程式 (1.1) は, 線形方程式系

$$L_i\Psi = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{1.3}$$

の両立条件 $[L_1, L_2] = 0$ として得られる.

この方程式は, 元来は素粒子の相互作用を担うゲージ場を記述する Yang-Mills 方程式を特殊化したものであり, その場合は物理的要請からゲージポテンシャルは $\mathfrak{su}(2)$ または $\mathfrak{su}(N)$ に値をとる. また, 独立変数 $z, \tilde{z}$ および $w, \tilde{w}$ も互いに複素共役である. しかしながら, 以下ではこうした由来は忘れて, 複素 4 変数の偏微分方程式だと考える.

ASDYM 方程式が可積分系において重要な対象である理由は, これが本質的に高次元系であるということに加え, KdV 方程式をはじめ多くの可積分方程式が ASDYM 方程式からの簡約として得られる, という事実にある. Painlevé 方程式も例外ではない [4].

本研究の大元の動機は, Painlevé 方程式と ASDYM 方程式の対応を特殊解を通じて議論することで, 前者のアフィンワイル群対称性が後者の対称性の離散部分群としてどのように実現されるのか, あるいは不変因子や多項式 Hamiltonian といった Painlevé 方程式にとって重要な量の幾何学的由来は何であるかを明らかにしたい, というものである.

このような目標からすれば, 現段階での到達は甚だ初歩的ではあるが, さしあたっての現状報告をするものである. 本稿では, Painlevé V 方程式の特殊函数解について考察する. Painlevé II, IV および III 方程式については, [6, 7, 8] において同様の考察を行っている. また, [11] も参照のこと.

2 Yang の方程式と行列式解

本節では, ASDYM 方程式と等価な Yang の方程式 [12] を導出し, その Bäcklund 変換と行列式で表される特殊解 [1, 2] について述べる.

ASDYM 方程式 (1.1) の第一，二式より，ゲージポテンシャルは２つの行列値函数 $H, \widetilde{H}$ を用いて，

$$A_z = -\partial_z H H^{-1}, \quad A_w = -\partial_w H H^{-1}, \quad A_{\tilde{z}} = -\partial_{\tilde{z}} \widetilde{H} \widetilde{H}^{-1}, \quad A_{\tilde{w}} = -\partial_{\tilde{w}} \widetilde{H} \widetilde{H}^{-1}, \tag{2.1}$$

と表せることがわかる．これらは，変換 $H \mapsto H\widetilde{M}$, $\widetilde{H} \mapsto \widetilde{H}M$ の自由度を除いて一意に定まる．ここで，M および $\widetilde{M}$ は，それぞれ z, w および $\tilde{z}, \tilde{w}$ のみに依存する 2×2 行列である．行列 J を $J = \widetilde{H}^{-1}H$ で導入しよう．ASDYM 方程式 (1.1) の第三式から，行列 J は

$$\partial_w \left(J^{-1}\partial_{\tilde{w}} J\right) - \partial_z \left(J^{-1}\partial_{\tilde{z}} J\right) = 0, \tag{2.2}$$

を満たすことがわかる．これを Yang の方程式と呼ぶ．明らかに，行列 J には変換

$$J \mapsto M^{-1} J \widetilde{M}, \tag{2.3}$$

による自由度がある．言い換えれば，(2.3) は方程式 (2.2) の Bäcklund 変換になっている．

Yang の方程式 (2.2) には，もうひとつ別の Bäcklund 変換が知られている．それを見るために，

$$J = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 1 & g \\ e & f^2 + eg \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

とおこう．Yang の方程式は，

$$\begin{aligned} &\partial_z \partial_{\tilde{z}} (\log f) + \frac{(\partial_{\tilde{z}} e)(\partial_z g)}{f^2} = \partial_w \partial_{\tilde{w}} (\log f) + \frac{(\partial_{\tilde{w}} e)(\partial_w g)}{f^2}, \\ &\partial_{\tilde{z}} \left(\frac{\partial_z g}{f^2}\right) = \partial_{\tilde{w}} \left(\frac{\partial_w g}{f^2}\right), \\ &\partial_z \left(\frac{\partial_{\tilde{z}} e}{f^2}\right) = \partial_w \left(\frac{\partial_{\tilde{w}} e}{f^2}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

と等価である．このとき，変換 $\beta : (e, f, g) \mapsto (\hat{e}, \hat{f}, \hat{g})$ を

$$\begin{aligned} &\hat{f} = \frac{1}{f}, \\ &\partial_z \hat{g} = \frac{\partial_{\tilde{w}} e}{f^2}, \quad \partial_w \hat{g} = \frac{\partial_{\tilde{z}} e}{f^2}, \\ &\partial_{\tilde{z}} \hat{e} = \frac{\partial_w g}{f^2}, \quad \partial_{\tilde{w}} \hat{e} = \frac{\partial_z g}{f^2}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

で定義すると，$(\hat{e}, \hat{f}, \hat{g})$ も (2.5) と同じ形の方程式を満たすことがわかる．

Bäcklund 変換 (2.3) で，

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

と選んだものを，変換 γ と呼ぼう．すなわち，

$$\gamma : \qquad J \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

であり，成分で書くと，

$$\gamma: \qquad f \mapsto \frac{f}{f^2+eg}, \quad g \mapsto \frac{e}{f^2+eg}, \quad e \mapsto \frac{g}{f^2+eg}, \tag{2.9}$$

である．Bäcklund 変換 β および γ は，2回施すと元に戻るような変換 ($\beta^2=1, \gamma^2=1$) である．しかし，これらは非可換 ($\beta\gamma \neq \gamma\beta$) なので，自明な解にこれらを交互に施すことにより無限個の解を生成できる．実際，Corrigan らは，Laplace 方程式に帰着される自明な解

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\partial_w \partial_{\bar{w}} - \partial_z \partial_{\bar{z}})\,\varphi = 0, \tag{2.10}$$

から出発して，行列式で表示される解の族を構成した [1, 2].

命題 2.1. 函数 τ_n^m を行列式によって，

$$\tau_n^m = \begin{vmatrix} \varphi_{m-n+1} & \varphi_{m-n+2} & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_{m-n+2} & \varphi_{m-n+3} & \cdots & \varphi_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m & \varphi_{m+1} & \cdots & \varphi_{m+n-1} \end{vmatrix}, \tag{2.11}$$

と定義する．ここで，φ_j は関係式

$$\partial_{\bar{w}} \varphi_j = \partial_z \varphi_{j+1}, \quad \partial_{\bar{z}} \varphi_j = \partial_w \varphi_{j+1}, \tag{2.12}$$

を満たすものとする．各 φ_j は Laplace 方程式

$$(\partial_w \partial_{\bar{w}} - \partial_z \partial_{\bar{z}})\,\varphi_j = 0, \tag{2.13}$$

を満たしている．このとき，双線形関係式

$$\begin{aligned} D_{\bar{w}} \tau_n^m \cdot \tau_{n-1}^{m+1} &= D_z \tau_n^{m+1} \cdot \tau_{n-1}^m, \\ D_{\bar{z}} \tau_n^m \cdot \tau_{n-1}^{m+1} &= D_w \tau_n^{m+1} \cdot \tau_{n-1}^m, \\ \tau_{n+1}^m \tau_{n-1}^m &= \tau_n^{m+1} \tau_n^{m-1} - \tau_n^m \tau_n^m, \end{aligned} \tag{2.14}$$

が成り立ち，これらを用いて

$$J = \frac{1}{\tau_n^m} \begin{pmatrix} \tau_n^{m-1} & \tau_{n+1}^m \\ \tau_{n-1}^m & \tau_n^{m+1} \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

が Yang の方程式 (2.2) の解となることがわかる．

注釈 2.2. 上の解の表示で，変換 $\beta\gamma$ は，添字 m を 1 だけ上げる．さらに，変換 γ_1, γ_2 を

$$\begin{aligned} \gamma_1: \qquad J &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \\ \gamma_2: \qquad J &\mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

で定義しよう．やはり，$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = 1$ である．このとき，変換 $\gamma_2\beta\gamma_1$ は，添字 n (すなわち行列式の大きさ) を 1 だけ上げる．

3 Painlevé V 方程式への簡約

本節では [4] にしたがい，ASDYM 方程式に適当な対称性を課して Painlevé V 方程式を導出する．大雑把にいえば，Laplace 方程式に適当な座標変換と変数分離を施して，(Bessel 函数等の）特殊函数が満たす線形常微分方程式を導く過程の非線形版である．なお，[3, 9] も参照のこと．

3.1 座標変換

独立変数 $(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^4$ の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2,4,\mathbb{C})$ への埋め込みを

$$\begin{bmatrix} 1 & z & 0 & w \\ 0 & \tilde{w} & 1 & \tilde{z} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

で与える．線形方程式系 (1.3) の波動函数 $\Psi = \Psi(z, w, \tilde{z}, \tilde{w})$ が，Jordan 群

$$J_{(2,1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & & \\ & & b & \\ & & & c \end{pmatrix} \middle| abc \neq 0 \right\}, \tag{3.2}$$

の作用が引き起こす座標変換に関して不変である，という条件を課そう．このとき，ASDYM 方程式は常微分方程式系に簡約される．Jordan 群 $J_{(2,1,1)}$ の生成元は，

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_a = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad R_a = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

の３つである．これらの作用に対する Ψ の不変性より，

$$\partial_z \Psi = 0, \quad (\tilde{z}\partial_{\tilde{z}} + w\partial_w)\Psi = 0, \quad (\tilde{z}\partial_{\tilde{z}} + \tilde{w}\partial_{\tilde{w}})\Psi = 0, \tag{3.4}$$

が得られる．そこで，$\partial_p = \partial_z$, $\partial_q = \tilde{z}\partial_{\tilde{z}} + w\partial_w$, $\partial_r = -\tilde{z}\partial_{\tilde{z}} - \tilde{w}\partial_{\tilde{w}}$ として，$(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}) \mapsto (p, q, r, t)$ と座標変換することを考える．変数 t は，

$$\begin{bmatrix} 1 & z & 0 & w \\ 0 & \tilde{w} & 1 & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & & \\ & & b & \\ & & & c \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

となるように，a, b, c を選ぶことにより定める．最終的に座標変換は，

$$z = p, \quad \tilde{z} = e^{q-r}, \quad w = te^q, \quad \tilde{w} = e^{-r}, \tag{3.6}$$

あるいは，

$$p = z, \quad q = \log\frac{\tilde{z}}{\tilde{w}}, \quad r = -\log\tilde{w}, \quad t = \frac{w\tilde{w}}{\tilde{z}}, \tag{3.7}$$

となる．この座標変換を用いて，ゲージポテンシャルを

$$A = A_{\tilde{z}}d\tilde{z} + A_{\tilde{w}}d\tilde{w} + A_z dz + A_w dw = Pdp + Qdq + Rdr + Tdt, \tag{3.8}$$

と書き換えよう．ゲージ変換により一般性を失うことなく $T = 0$ とできるから，

$$A_z = P, \quad A_{\tilde{z}} = e^{-q+r}Q, \quad A_w = 0, \quad A_{\tilde{w}} = -e^{r}(Q+R), \tag{3.9}$$

となる．

3.2 Painlevé V 方程式の導出

いま，P, Q, R は t のみの函数である．したがって，ASDYM 方程式 (1.1) は，

$$P' = 0, \quad Q' = [Q, -R + tP], \quad R' = [Q, R], \quad {}' = t\frac{d}{dt}, \tag{3.10}$$

に帰着する．以下，行列 P の固有値が 0 でない場合を考えよう．ゲージ変換を用いると，

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{k} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{k} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} \neq 0, \tag{3.11}$$

とできる．行列 Q, R を

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & -Q_{11} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & -R_{11} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

とおき，これら 6 個の変数に対する方程式を書き下すと，

$$\begin{aligned}
Q'_{11} &= Q_{21}R_{12} - Q_{12}R_{21}, \\
Q'_{12} &= 2\left(Q_{12}R_{11} - Q_{11}R_{12}\right) - 2ktQ_{12}, \\
Q'_{21} &= 2\left(Q_{11}R_{21} - Q_{21}R_{11}\right) + 2ktQ_{21}, \\
R'_{11} &= Q_{12}R_{21} - Q_{21}R_{12}, \\
R'_{12} &= 2\left(Q_{11}R_{12} - Q_{12}R_{11}\right), \\
R'_{21} &= 2\left(Q_{21}R_{11} - Q_{11}R_{21}\right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．見掛けは 1 階 6 連立の方程式系だが，以下の 3 つの量

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l} &= \mathrm{tr}\left[P\left(Q+R\right)\right] = 2\mathfrak{k}(Q_{11} + R_{11}), \\
\mathfrak{m}^2 &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(R^2\right) = R_{11}^2 + R_{12}R_{21}, \\
\mathfrak{n}^2 &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(Q^2\right) = Q_{11}^2 + Q_{12}Q_{21},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

が t に依らない保存量となるので，実質的な未知変数は 3 つである．

変数 y, x を

$$y = -\frac{R_{12}}{Q_{12}}, \quad R_{11} = yx + \mathfrak{m}, \tag{3.15}$$

で導入し，これらについての方程式を書き下すと，

$$
\begin{aligned}
y' &= 2y(y-1)^2 x - \left[\kappa_0 (y-1)^2 + \theta y(y-1) + \eta t y\right], \\
x' &= -(3y-1)(y-1)x^2 + \left[2\kappa_0 (y-1) + \theta(2y-1) + \eta t\right] x - \kappa,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

を得る．ここで，

$$
\eta = -2\mathfrak{t}, \quad \kappa_0 = -2\mathfrak{m}, \quad \theta = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{t}}, \quad \kappa_\infty^2 = 4\mathfrak{n}^2, \tag{3.17}
$$

および

$$
\kappa = \frac{1}{4}(\kappa_0 + \theta)^2 - \frac{1}{4}\kappa_\infty^2, \tag{3.18}
$$

とおいた．これは，Painlevé V 方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} \\
&\quad + \frac{(y-1)^2}{2t^2}\left(\kappa_\infty^2 y - \frac{\kappa_0^2}{y}\right) - \eta(\theta+1)\frac{y}{t} - \frac{\eta^2}{2}\frac{y(y+1)}{y-1},
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

に対応する正準方程式である．同様に，$\hat{y} = -R_{21}/Q_{21}$ についての方程式を書き下すと，P_{V}

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 \hat{y}}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\hat{y}} + \frac{1}{\hat{y}-1}\right)\left(\frac{d\hat{y}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{d\hat{y}}{dt} \\
&\quad + \frac{(\hat{y}-1)^2}{2t^2}\left(\kappa_\infty^2 \hat{y} - \frac{\kappa_0^2}{\hat{y}}\right) - \eta(\theta-1)\frac{\hat{y}}{t} - \frac{\eta^2}{2}\frac{\hat{y}(\hat{y}+1)}{\hat{y}-1},
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

が得られる．パラメータ θ が -2 だけずれていることに注意せよ．

超幾何函数解の構成に話を進める前に，行列 H についてひとこと注意しておこう．Painlevé V 方程式の任意の解に対して，

$$
A_z = \begin{pmatrix} \mathfrak{t} & \\ & -\mathfrak{t} \end{pmatrix}, \quad A_w = 0, \tag{3.21}
$$

であるから，

$$
H = \begin{pmatrix} e^{-\mathfrak{t}z} & \\ & e^{\mathfrak{t}z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\eta z} & \\ & e^{-\frac{1}{2}\eta z} \end{pmatrix}, \tag{3.22}
$$

ととれることがわかる．もちろん，行列 $\widetilde{M}$ による規格化の自由度がある．

4 Riccati 解

Painlevé V 方程式には，Kummer の合流型超幾何函数 $F(a,c;t)$ で表されるような特殊解が存在する．

命題 4.1. [5] 函数 $\varphi_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{Z})$ を

$$
\varphi_{i,j} = c_1 \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(c-a-i+j)}{\Gamma(c+j)} f_{i,j} + c_2 \frac{1}{\sin\pi(c-a-i+j)\Gamma(2-c-j)} g_{i,j}, \tag{4.1}
$$

で定義する．ここで，

$$f_{i,j} = F(a+i, c+j; s), \quad g_{i,j} = s^{1-c-j} F(a-c+1+i-j, 2-c-j; s), \tag{4.2}$$

であり，c_1, c_2 は任意の複素定数，$s = \eta t$ である．このとき，

$$y = -\frac{\varphi_{0,1}}{\varphi_{1,1}}, \quad x = 0, \qquad \kappa_\infty = a, \quad \kappa_0 = c - a, \quad \theta = -c, \tag{4.3}$$

は，方程式系 (3.16) の解を与える．

函数 $\varphi_{i,j}$ が，以下の近接関係式

$$\begin{aligned} &\varphi_{1,1} = \varphi_{0,0} - \varphi_{0,1}, \quad s\varphi_{1,1} = (c-a-1)\varphi_{1,0} - a\varphi_{0,0}, \\ &\dot{\varphi}_{0,0} = \varphi_{1,1}, \quad \varphi'_{0,1} = (c-a)\varphi_{0,0} - c\,\varphi_{0,1}, \qquad \dot{} = \frac{d}{ds}, \quad {}' = s\frac{d}{ds}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

を満たすことに注意すれば，この特殊解に対応するゲージポテンシャル Q, R は，

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \varphi_{1,1} \\ & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & \varphi_{0,1} \\ & -\frac{a-c}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

となる．もとの変数で書くと，

$$A_{\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \varphi_{1,1} \\ & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{\tilde{w}} = -\frac{1}{\tilde{w}} \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & \varphi_{0,0} \\ & \frac{c}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

である．線形方程式 $\partial_{\tilde{z}} \widetilde{H} = -A_{\tilde{z}} \widetilde{H}, \partial_{\tilde{w}} \widetilde{H} = -A_{\tilde{w}} \widetilde{H}$ を解いて行列 $\widetilde{H}$ を求めよう．いまの場合，$A_{\tilde{z}}, A_{\tilde{w}}$ が上三角であるから容易に解くことができる．実際，

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} F & G \\ & F^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

とおいて計算すれば，$F = \tilde{z}^{a/2}\,\tilde{w}^{-c/2}, G = (c-a)^{-1}\,\tilde{z}^{-a/2}\,\tilde{w}^{c/2}\,\varphi_{0,1}$ と求まる．前節で得られた行列 H とあわせて $J = \widetilde{H}^{-1} H$ により行列 J は与えられるのだが，これに行列 $M, \widetilde{M}$ による変換を施して対角成分を 1 に規格化しよう．そのためには，

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\eta z/2} & \\ & e^{\eta z/2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{z}^{a/2}\,\tilde{w}^{-c/2} & \\ & \tilde{z}^{-a/2}\,\tilde{w}^{c/2} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

と採ればよい．このとき，

$$M^{-1} J \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

と書くと，

$$\varphi = \frac{1}{a-c}\, e^{-\eta z}\tilde{z}^{-a}\tilde{w}^{c}\,\varphi_{0,1}, \tag{4.10}$$

となる．次節以降の議論との関係で重要なのは，次の事実である．

補題 4.2. 函数 φ は，Laplace 方程式 $(\partial_w\partial_{\tilde{w}} - \partial_z\partial_{\tilde{z}})\,\varphi = 0$ を満たす．

第２節で示した Yang の方程式の自明な解 (2.10) と見比べれば，Laplace 方程式の特殊解として (4.10) を選んだものが P_V の Riccati 解に対応する，ということがわかる．

命題 4.3. P_V の Riccati 解に対する行列 J は

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{a-c}\, e^{-\eta z}\tilde{z}^{-a}\tilde{w}^{c}\,\varphi_{0,1}, \tag{4.11}$$

で与えられる．行列 H を

$$H = \begin{pmatrix} e^{\eta z/2}\,\tilde{z}^{a/2}\,\tilde{w}^{-c/2} & \\ & e^{-\eta z/2}\,\tilde{z}^{-a/2}\,\tilde{w}^{c/2} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

と定義すると，Riccati 解に対するゲージポテンシャルは，

$$A_z = -\partial_z H H^{-1}, \quad A_w = -\partial_w H H^{-1}, \tag{4.13}$$

および

$$A_{\tilde{z}} = (-\partial_{\tilde{z}} H + HJ^{-1}\partial_{\tilde{z}} J)H^{-1}, \quad A_{\tilde{w}} = (-\partial_{\tilde{w}} H + HJ^{-1}\partial_{\tilde{w}} J)H^{-1}, \tag{4.14}$$

で再現される．

5 超幾何函数解に対する行列 J

以上の議論を踏まえて，本節では Painlevé V 方程式の超幾何函数解に対する行列 J を構成する．期待される結果は，第２節で与えた行列式解の特殊化として得られる，というものである．

まず，P_V の超幾何函数解の行列式表示 [5] について述べておこう．

命題 5.1. 函数 $\tau_n^{i,j}$ を

$$\tau_n^{i,j} = \begin{vmatrix} \varphi_{i,j+n-1} & \varphi_{i,j+n-2} & \cdots & \varphi_{i,j} \\ \varphi_{i,j+n-2} & \varphi_{i,j+n-3} & \cdots & \varphi_{i,j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i,j} & \varphi_{i,j-1} & \cdots & \varphi_{i,j-n+1} \end{vmatrix}, \tag{5.1}$$

で定義する．ここで，$\varphi_{i,j}$ は，(4.1) で与えられている．このとき，

$$y = -\frac{\tau_n^{l+1,l-m}\tau_{n+1}^{l,l-m+1}}{\tau_n^{l,l-m}\tau_{n+1}^{l+1,l-m+1}}, \quad x = -(a+l)\,\frac{\tau_n^{l,l-m}\tau_{n+1}^{l+1,l-m+1}\tau_{n-1}^{l+2,l-m+1}}{\tau_n^{l+1,l-m+1}\tau_n^{l+1,l-m+1}\tau_n^{l+1,l-m}}, \tag{5.2}$$

$$\kappa_\infty = a+l+n, \quad \kappa_0 = c-a-m, \quad \theta = -c-l+m+n, \tag{5.3}$$

は，方程式系 (3.16) を満たす．

注釈 5.2. 上の命題で，$l, m \in \mathbb{Z}$ はパラメータ a, c が一般的な値をとるならば，それらの再定義により吸収できるので $l = m = 0$ とおいてよい．ここでは，以下の話の都合上，$l = m = 0$ と固定せずに残しておいた．

座標系 (p,q,r,t) の下で，漸化式 (2.12) および微分方程式 (2.13) を変数分離によって解くと，

$$\varphi_j = e^{-\eta p - aq - (c-a-j)r}\psi_{-j}, \quad \psi_j = K_j\,\varphi_{0,j+1}, \quad K_j = \frac{(-\eta)^j}{\Gamma(c_j - a + 1)}, \tag{5.4}$$

を得る．このとき，(2.12),(2.13) はぞれぞれ，合流型超幾何函数の近接関係式

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{0,j} &= \varphi_{0,j} - \varphi_{0,j+1}, \\ \varphi'_{0,j+1} &= -(c+j)\varphi_{0,j+1} + (c+j-a)\varphi_{0,j}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

および微分方程式

$$s\ddot{\varphi}_{0,j} + (c+j-s)\dot{\varphi}_{0,j} - a\varphi_{0,j}, \tag{5.6}$$

に帰着する．よってタウ函数 (2.11) は，(5.1) で与えた $\tau_n^{i,j}$ を用いて，

$$\begin{aligned} \tau_n^m &= \lambda_n^m \times \tau_n^{-n+1,-m+1}, \\ \lambda_n^m &= e^{-n\eta p - naq - n(c-a-m)r}\eta^{-\binom{n}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} K_{-m+j} \prod_{j=1}^{n-1} (a-j)^{n-j}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

となる．

行列 H を，改めて

$$H = \begin{pmatrix} e^{\eta z/2}\,\tilde{z}^{a/2}\,\tilde{w}^{-(c-m-n)/2} & \\ & e^{-\eta z/2}\,\tilde{z}^{-a/2}\,\tilde{w}^{(c-m-n)/2} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

で導入しよう．このとき，(4.14) によりゲージポテンシャル $A_{\tilde{z}}, A_{\tilde{w}}$ を計算し，さらに Q, R を求めると，

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -\frac{a}{2} + (c-a-m)\,\frac{\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \\ Q_{12} &= \eta K_{-m-1}\prod_{j=1}^{n}(a-j)\,\frac{\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n,-m}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \\ Q_{21} &= -K_{-m}^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}(a-j)^{-1}\frac{\tau_n^{-n+2,-m+2}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

および

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{c-a-m+n}{2} + (a-n)\,\frac{\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+2,-m+1}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \\ R_{12} &= \eta K_{-m-1}\prod_{j=1}^{n}(a-j)\,\frac{\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \\ R_{21} &= -K_{-m}^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}(a-j)^{-1}\frac{\tau_n^{-n+1,-m+2}\tau_{n-1}^{-n+2,-m+1}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

を得る．

注釈 5.3. 詳細は省略するが，上の表示 (5.9),(5.10) を得るには，双線形関係式 (2.14) の他に，P_V（の超幾何函数解）に対する以下の双線形関係式

$$\begin{aligned}&D_s\tau_n^{-n+1,-m+1}\cdot\tau_{n-1}^{-n+2,-m+2}=\tau_n^{-n+2,-m+2}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1},\\&(D-a)\tau_n^{-n+1,-m+1}\cdot\tau_n^{-n+1,-m+2}=-(a-n)\,\tau_n^{-n+2,-m+2}\tau_n^{-n,-m+1},\end{aligned}\tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1}+\tau_n^{-n+1,-m+2}\tau_n^{-n,-m}=\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n,-m+1},\\&(c-a-m)\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1}\\&\qquad+(a-n)\tau_n^{-n+2,-m+2}\tau_n^{-n,-m}=a\,\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1},\\&\tau_{n+1}^{-n,-m}\tau_n^{-n+1,-m+1}=\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n,-m}+\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m},\\&(c-a-m)\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+1,-m+1}\\&\qquad+(a-n)\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+2,-m+1}=n\,\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1},\\&-(a-n)\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+2,-m+1}\\&=(c-a-m)\tau_n^{-n+1,-m+2}\tau_n^{-n+1,-m}-(c-a-m+n)\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1},\end{aligned}\tag{5.12}$$

等を用いている．ASDYM 方程式の双線形関係式 (2.14) だけでは，Q,R の各成分をタウ函数の比の比の形で表すことはできない．ASDYM 方程式からの簡約過程で，双線形関係式 (5.11),(5.12) がどのように生じるのかは，いまのところよくわからない．

以上の結果から，

$$y=-\frac{\tau_{n+1}^{-n,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m}}{\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n,-m}},\quad x=-(a-n)\,\frac{\tau_n^{-n,-m}\tau_{n+1}^{-n+1,-m+1}\tau_{n-1}^{-n+2,-m+1}}{\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m+1}\tau_n^{-n+1,-m}},\tag{5.13}$$

を得る．これは，方程式系 (3.16) でパラメータが

$$\kappa_\infty=a,\quad \kappa_0=c-a-m+n,\quad \theta=-c+m+n,\tag{5.14}$$

の場合の解を与える．まとめておこう．

定理 5.4. 函数 φ_j を

$$\varphi_j=e^{-\eta p-aq-(c-a-j)r}\psi_{-j},\quad \psi_j=K_j\,\varphi_{0,j+1},\quad K_j=\frac{(-\eta)^j}{\Gamma(c_j-a+1)},\tag{5.15}$$

で定義し，函数 τ_n^m を (2.11) で定義する．このとき，Painlevé V 方程式の超幾何函数解に対する行列 J は，

$$J=\frac{1}{\tau_n^m}\begin{pmatrix}\tau_n^{m-1}&\tau_{n+1}^m\\\tau_{n-1}^m&\tau_n^{m+1}\end{pmatrix},\tag{5.16}$$

で与えられる．

6 Yang の方程式と Painlevé V 方程式

本節では，これまでの議論も踏まえて，Yang の方程式の Bäcklund 変換から Painlevé V 方程式のそれを導くことを試みる．現段階では，P_V のアフィンワイル群対称性を完全

には回復できていない．また，Yang の方程式の Bäcklund 変換からの導出も「手で作った」段階であり，対称性についての自然な説明を与えたものではない．

そのため，以下の議論は甚だ見通しの悪いものになっている．しかしながら，現時点での到達を記しておくのもそれなりに意味があるだろうと考えて，やや細かい計算も含めて述べておくことにする．

6.1 Painlevé V 方程式の導出

ここでは，準備として，Yang の方程式から直接に P_V を導出する．ここでの議論は，第 3 節の単なる焼き直しである．

J 行列を

$$J = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\eta p-\frac{1}{2}\mu_1 q-\frac{1}{2}\mu_3 r}A & e^{-\frac{1}{2}\eta p-\frac{1}{2}\nu_1 q-\frac{1}{2}\nu_3 r}B \\ e^{\frac{1}{2}\eta p+\frac{1}{2}\nu_1 q+\frac{1}{2}\nu_3 r}C & e^{-\frac{1}{2}\eta p+\frac{1}{2}\mu_1 q+\frac{1}{2}\mu_3 r}D \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

と特殊化しよう．ここで，$\mu_1, \mu_3, \nu_1, \nu_3$ は定数であり，A, B, C, D は，$AD - BC = 1$ を満たす t のみの函数とする．このとき，Yang の方程式 (2.2) を成分ごとに書き下すと，

$$\begin{aligned}
&\left[A'D - BC' + \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3)AD + \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_3)BC\right]_t = 0,\\
&\left[AD' - B'C - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3)AD - \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_3)BC\right]_t = 0,\\
&\left[B'D - BD' + \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3+\nu_1+\nu_3)BD\right]_t = \eta\left[B'D - BD' + \tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)BD\right],\\
&\left[AC' - A'C - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3+\nu_1+\nu_3)AC\right]_t = \eta\left[A'C - AC' + \tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)AC\right],
\end{aligned} \tag{6.2}$$

を得る．行列 H を

$$H = \begin{pmatrix} e^h & \\ & e^{-h} \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{2}\eta p + \frac{1}{4}(\nu_1-\mu_1)q + \frac{1}{4}(\nu_3-\mu_3)r, \tag{6.3}$$

で与え，$A_{\bar z}, A_{\bar w}$ を

$$A_{\bar z} = (-\partial_{\bar z}H + HJ^{-1}\partial_{\bar z}J)H^{-1}, \quad A_{\bar w} = (-\partial_{\bar w}H + HJ^{-1}\partial_{\bar w}J)H^{-1}, \tag{6.4}$$

で導入する．さらに，Q, R を $A_{\bar z} = e^{-q+r}Q$, $A_{\bar w} = -e^r(Q+R)$ で導入すれば，

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= -A'D + BC' - \tfrac{1}{2}(\mu_1 AD + \nu_1 BC) + \tfrac{1}{4}(\mu_1 - \nu_1),\\
Q_{12} &= -B'D + BD' - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)BD,\\
Q_{21} &= A'C - AC' + \tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)AC,\\
Q_{22} &= -AD' + B'C + \tfrac{1}{2}(\mu_1 AD + \nu_1 BC) - \tfrac{1}{4}(\mu_1 - \nu_1),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

および

$$R = \frac{1}{2}(\mu_3+\nu_3)\begin{pmatrix} -BC - \frac{1}{2} & -BD \\ AC & BC + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

を得る．よって，直ちに

$$R_{11}^2 + R_{12}R_{21} = \frac{1}{4}\alpha_3^2, \tag{6.8}$$

を得る．ここで，$\alpha_3 = \frac{1}{2}(\mu_3 + \nu_3)$ とおいた．方程式 (6.2) の第一，第二式より，α_0, α_1 を定数として，

$$\begin{aligned} &A'D - BC' + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_3)AD + \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3)BC \\ &\qquad\qquad -\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 - \nu_1 - \nu_3) = \alpha_0 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \\ &AD' - B'C - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_3)AD - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3)BC \\ &\qquad\qquad +\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 - \nu_1 - \nu_3) = -\alpha_0 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \end{aligned} \tag{6.9}$$

とおこう（$\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1$ の定義）．これにより，

$$Q_{11} + R_{11} = -\alpha_0 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \tag{6.10}$$

である．

注釈 6.1. パラメータ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ 等は，野海–山田の対称形式 [10] を意識した記法である．Painlevé V 方程式の対称形式については，付録 A を参照のこと．

さて，直接の計算により $Q_{12}R_{21} - Q_{21}R_{12} = -\alpha_3(BC)'$ であることがわかるから，これより，

$$R_{11}' = Q_{12}R_{21} - Q_{21}R_{12}, \quad Q_{11}' = Q_{21}R_{12} - Q_{12}R_{21}, \tag{6.11}$$

を得る．さらに，方程式 (6.2) の第三，第四式より，

$$(Q_{12} + R_{12})' = \eta t Q_{12}, \quad (Q_{21} + R_{21})' = -\eta t Q_{21}, \tag{6.12}$$

を得る．同様に，直接の計算により $2(Q_{11}R_{12} - Q_{12}R_{11}) = -\alpha_3(BD)'$ および $2(Q_{21}R_{11} - Q_{11}R_{21}) = \alpha_3(AC)'$ であることがわかるから，これらより，

$$R_{12}' = 2(Q_{11}R_{12} - Q_{12}R_{11}), \quad R_{21}' = 2(Q_{21}R_{11} - Q_{11}R_{21}), \tag{6.13}$$

および

$$Q_{12}' = 2(Q_{12}R_{11} - Q_{11}R_{12}) + \eta t Q_{12}, \quad Q_{21}' = 2(Q_{11}R_{21} - Q_{21}R_{11}) - \eta t Q_{21}, \tag{6.14}$$

を得る．以上から $(Q_{11}^2 + Q_{12}Q_{21})' = 0$ であることもわかるので，

$$Q_{11}^2 + Q_{12}Q_{21} = \frac{1}{4}\alpha_1^2, \tag{6.15}$$

とおこう．

ここまで来れば，第 3 節の議論から，Painlevé V 方程式の正準方程式が得られることは直ちにわかる．パラメータの対応は，$\alpha_1 = \kappa_\infty$, $\alpha_3 = \kappa_0$ および $-2\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_3 = \theta$ となる．

6.2 Bäcklund 変換

第2節で述べた変換γ,γ_1,γ_2およびβを考え，これらから Painlevé V 方程式の Bäcklund 変換がどれだけ復元されるかを調べよう．これらの変換の作用は，(6.1) の特殊化の下では，

$$\begin{aligned}\gamma\ :\ &\eta\mapsto-\eta,\quad \mu_1\mapsto-\mu_1,\quad \mu_3\mapsto-\mu_3,\quad \nu_1\mapsto-\nu_1,\quad \nu_3\mapsto-\nu_3,\\ &(A,B,C,D)\mapsto(D,C,B,A),\end{aligned}\tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1\ :\ &\eta\mapsto-\eta,\quad \mu_1\leftrightarrow\nu_1,\quad \mu_3\leftrightarrow\nu_3,\\ &(A,B,C,D)\mapsto(B,-A,D,-C),\end{aligned}\tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2\ :\ &\mu_1\mapsto-\nu_1,\quad \nu_1\mapsto-\mu_1,\quad \mu_3\mapsto-\nu_3,\quad \nu_3\mapsto-\mu_3,\\ &(A,B,C,D)\mapsto(C,-D,A,-B),\end{aligned}\tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}\beta\ :\ &\eta\mapsto-\eta,\quad \mu_1\mapsto-\mu_1,\quad \mu_3\mapsto-\mu_3,\quad \nu_1\mapsto-\nu_1,\quad \nu_3\mapsto-\nu_3-2,\\ &A\mapsto\frac{1}{A},\quad B\mapsto\eta^{-1}\frac{AC'-A'C-\frac{1}{2}(\mu_1+\nu_1+2\alpha_3)AC}{A},\\ &C\mapsto\frac{\eta(A\dot{B}-\dot{A}B-AB)}{(\alpha_3+1)A},\end{aligned}\tag{6.19}$$

と記述される．また，変換βより，

$$\begin{aligned}&\left[AC'-A'C-\tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1+2\alpha_3)AC\right]_t=\eta\left[A'C-AC'+\tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)AC\right],\\ &(A\dot{B}-\dot{A}B-AB)'+\tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1+2\alpha_3+2)(A\dot{B}-\dot{A}B)=\tfrac{1}{2}(\mu_1+\nu_1)AB,\end{aligned}\tag{6.20}$$

が成り立つ．これらより，

$$\begin{aligned}\beta\gamma\quad &:\ \mu_1\mapsto\mu_1,\quad \mu_3\mapsto\mu_3,\quad \nu_1\mapsto\nu_1,\quad \nu_3\mapsto\nu_3+2,\quad \alpha_3\mapsto\alpha_3+1,\\ \gamma_2\beta\gamma_1\ &:\ \mu_1\mapsto\mu_1,\quad \mu_3\mapsto\mu_3-2,\quad \nu_1\mapsto\nu_1,\quad \nu_3\mapsto\nu_3,\quad \alpha_3\mapsto\alpha_3-1,\end{aligned}\tag{6.21}$$

となる．第5節で議論した超幾何函数解の情報から，

$$\begin{aligned}T_3^{-1}:=\beta\gamma\quad &:\ (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mapsto(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3+1),\\ T_0^{-1}:=\gamma_2\beta\gamma_1\ &:\ (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mapsto(\alpha_0+1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1),\end{aligned}\tag{6.22}$$

である（はずな）ので，αを（Bäcklund 変換の作用を受けない）定数として，

$$\mu_3=\alpha_3+\alpha_2-\alpha_0+\alpha,\quad \nu_3=\alpha_3-\alpha_2+\alpha_0-\alpha,\tag{6.23}$$

とおくことができる．

続いて，変換γ_2の作用を詳しく調べよう．パラメータへの作用は，

$$\gamma_2\ :\ \alpha_3\mapsto-\alpha_3,\quad \alpha_2-\alpha_0\mapsto\alpha_2-\alpha_0,\tag{6.24}$$

となる．また，R_{12}/Q_{12}およびR_{11}は，γ_2の作用で不変であるから，

$$\gamma_2\ :\ y\mapsto y,\quad x\mapsto x-\frac{\alpha_3}{y},\tag{6.25}$$

を得る．よって，$\gamma_2=s_3$（s_3は付録 A で与えた対称形式での記法）であることがわかる．

次に，変換 γ_1 の作用を詳しく調べよう．直ちに，

$$\gamma_1 : \frac{R_{12}}{Q_{12}} \mapsto \frac{R_{21}}{Q_{21}}, \tag{6.26}$$

すなわち，$\gamma_1 : y \mapsto \hat{y}$ であることがわかるから，$\gamma_1 : \eta(\theta+1) \mapsto \eta(\theta-1)$ である．これより，

$$\gamma_1 : \theta \mapsto -\theta, \tag{6.27}$$

すなわち，$\gamma_1 : \alpha_2 - \alpha_0 - 1 \mapsto -\alpha_2 + \alpha_0 + 1$ であることがわかる．一方，$\gamma_1 : \mu_3 \leftrightarrow \nu_3$ より，$\gamma_1 : \alpha_2 - \alpha_0 + \alpha \mapsto -\alpha_2 + \alpha_0 - \alpha$ であるから，$\alpha = -1$ である．また，変換 γ_1 の正準変数 x への作用を計算することで，付録 A で与えた変換 r が，$r = \gamma\beta\gamma_1\beta\gamma$ と表されることがわかる．

ここまでで，

$$s_3 = \gamma_2, \quad s_2 s_1 \pi = \gamma\beta\gamma_2, \quad r = \gamma\beta\gamma_1\beta\gamma, \tag{6.28}$$

であることがわかった．平行移動演算子は，

$$T_3 = s_2 s_1 \pi s_3 = \gamma\beta, \quad T_0 = s_3 s_2 s_1 \pi = \gamma_1\beta\gamma_2, \tag{6.29}$$

である．変換 s_1 で方程式系 (3.16) は不変であるが，上で得られた変換は，すべて s_1 と可換であることに注意しよう．

7 まとめと今後の課題

本稿では，Painlevé V 方程式の超幾何函数解に対する行列 J を構成し，それが Corrigan らの行列式解の特殊化として得られることを示した．

冒頭でも述べたように本研究の動機のひとつは，Painlevé 方程式のアフィンワイル群対称性を，ASDYM 方程式の対称性および簡約過程から説明することにある．本稿で与えた結果から，$\mathrm{P_V}$ の $\widetilde{W}(A_3^{(1)})$ 対称性のうち，$\mathbb{Z}^2$ を含むある部分群については，J 行列に対する変換から由来することが読みとれる．対称性全体について把握することは，今後の課題である．

A Painlevé V 方程式の対称形式

Painlevé V 方程式の対称形式は，

$$\begin{aligned}
f_0' &= f_0 f_2 (f_1 - f_3) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right) f_0 + \alpha_0 f_2, \\
f_1' &= f_1 f_3 (f_2 - f_0) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_3\right) f_1 + \alpha_1 f_3, \\
f_2' &= f_2 f_0 (f_3 - f_1) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_0\right) f_2 + \alpha_2 f_0, \\
f_3' &= f_3 f_1 (f_0 - f_2) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) f_3 + \alpha_3 f_1,
\end{aligned} \qquad ' = t\frac{t}{dt}, \tag{A.1}$$

および規格化条件

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1, \quad f_0+f_2=f_1+f_3=\sqrt{\eta t}, \tag{A.2}$$

で与えられる．変数およびパラメータの対応は，それぞれ

$$y=-\frac{f_3}{f_1}, \quad x=\frac{1}{\sqrt{\eta t}}f_1(f_0f_1+\alpha_0), \tag{A.3}$$

および

$$\kappa_\infty=\alpha_1, \quad \kappa_0=\alpha_3, \quad \theta=\alpha_2-\alpha_0-1, \tag{A.4}$$

となる．$\mathrm{P_V}$ に対する Bäcklund 変換は，対称形式を用いると，

$$\begin{aligned} s_i(\alpha_j)&=\alpha_j-a_{ij}\alpha_i, \quad \pi(\alpha_j)=\alpha_{j+1},\\ s_i(f_j)&=f_j+u_{ij}\frac{\alpha_i}{f_i}, \quad \pi(f_j)=f_{j+1}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

と表される．ここで，

$$(a_{ij})_{i,j=0}^{3}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (u_{ij})_{i,j=0}^{3}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

である．これらの変換全体は，拡大アフィンワイル群 $\widetilde{W}(A_3^{(1)})=\langle s_0,s_1,s_2,s_3,\pi\rangle$ を生成する．

$\mathrm{P_V}$（の対称形式）には，以下のような Bäcklund 変換

$$\begin{aligned} \pi_0 \;&:\; t\mapsto -t, \quad \eta\mapsto-\eta,\\ r \;&:\; \eta\mapsto-\eta,\\ &\quad f_0\mapsto\sqrt{-1}f_2, \quad f_2\mapsto\sqrt{-1}f_0, \quad f_1\mapsto\sqrt{-1}f_1, \quad f_3\mapsto\sqrt{-1}f_3,\\ &\quad (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mapsto(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3), \end{aligned} \tag{A.7}$$

も存在する．変換 r の正準変数 y,x およびパラメータ $\kappa_0,\kappa_\infty,\theta$ に対する作用は，

$$r\,:\,x\mapsto x+\frac{\theta+1}{1-y}-\frac{\eta t}{(1-y)^2}, \quad \theta\mapsto-\theta-2, \tag{A.8}$$

となる．

参考文献

[1] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Bäcklund transformations and the construction of the Atiyah-Ward ansätze for self-dual $SU(2)$ gauge fields, Phys. Lett. **72 B** (1978) 354-356.

[2] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, The construction of self-dual solutions to $SU(2)$ gauge theory, Commun. Math. Phys. **58** (1978) 223-240.

[3] 川向洋之，新田貴士，ヤン・ミルズ方程式から見たパンルヴェ方程式の退化，数理解析研究所講究録 No.1367 「複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析」(2004) 134-147.

[4] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse, Integrability, Self-duality and Twister Theory, Oxford University Press, 1996.

[5] T. Masuda, Classical transcendental solutions of the Painlevé equations and their degeneration, Tohoku Math. J. **56** (2004) 467-490.

[6] 増田 哲，反自己双対 Yang-Mills 方程式と Painlevé II 方程式の特殊函数解数理解析研究所講究録 No.1400 「可積分系理論とその周辺—課題と展望を探る」(2004) 157-169.

[7] T. Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and classical transcendental solutions to the Painlevé II and IV equations, J. Phys. A **38** (2005) 6741-6757.

[8] T. Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and the Painlevé III equation, J. Phys. A. **40** (2007) 14433-14445.

[9] 村田嘉弘，可積分系・パンルベ方程式とツイスター，数理科学 2006 年 10 月号.

[10] 野海 正俊,「パンルヴェ方程式 - 対称性からの入門 -」，すうがくの風景 **4**，朝倉書店 (2000).

[11] M. R. Shah and N. M. J. Woodhouse, Painlevé VI, hypergeometric hierarchies and Ward ansätze, J. Phys. A **39** (2006) 12265-12269.

[12] C. N. Yang, Condition of selfduality for $SU(2)$ gauge fields on Euclidean four-dimensional space. Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1377-1379.